**ממ"ן 13**

ערמת היא עץ בינארי כמעט שלם, המקיים את התנאים:

* לכל צומת בעומק זוגי, ערכו גדול מ- או שווה לערכו של כל אחד מצאצאיו
* לכל צומת בעומק אי-זוגי, ערכו קטן מ- או שווה לערכו של כל אחד מצאצאיו

1. הוכיחו שאפשר למצוא את ערך המקסימום אות הערך המינימום בזמן קבוע.

* הטענות הנ"ל מניחות שמספר הצמתים בעץ הוא לכל הפחות 1, אחרת זה טריוויאלי.

מציאת ערך המקסימום:

טענה: ערך המקסימום יהיה תמיד בשורש העץ הבינארי שמייצג את הערימה בעומק זוגי 0.

נניח בשלילה שהמקסימום לא נמצא בעומק 0, אלא בעומק מסוים כאשר .

מההגדרה של ערמת , כל עומק זוגי לפני מכיל צומת אשר שווה או גדול מערכו, דבר שכמובן הוא סתירה לכך שהוא המקסימום (אלא אם כן כל הצמתים בעומקים הזוגיים שווים לו- אבל אז בהכרח גם הצומת בעומק 0 הוא המקסימום).

מציאת ערך המינימום:

טענה: ערך המינימום יימצא או בשורש (במקרה של עץ עם צומת אחד בלבד) או בעומק 1.

עבור עץ עם צומת אחד – בהכרח האיבר היחידי הוא המינימום (וגם המקסימום).

אחרת, נניח בשלילה שערך המינימום נמצא בעומק כאשר .

אם , אז לפי הטענה הקודמת הוא המקסימום

* אם כל הצמתים בעץ שווים ואז הוא גם מינימום (אך אז גם הצמתים ברמה 1 הם המינימום והטענה מתקיימת)
* אחרת, לפי ההגדרה של הערמה, כיוון ש0 הוא צומת בעומק זוגי אז יש לו צאצאים שקטנים ממנו ולכן הוא לא מינימלי.

עבור , אם הוא בעומק זוגי, אז ערכו גדול או שווה לערך כל צאצאיו, ולכן המינימום לא יכול להיות ברמה זוגית.

עבור בעומק אי-זוגי, הוא קטן שווה לערכו של כל אחד מצאצאיו, אם נסתכל על העומק האי-זוגי הקטן ביותר (3), הערכים בצמתים בו חייבים להיות בהכרח לפי ההגדרה קטנים מערכי הצמתים של הצאצאים שלו. אבל הוא עצמו צאצא של הצומת בעומק האי-זוגי הראשון 1, ולכן הוא לא יכול להיות המינימום, בסתירה להטענה שהמינימום נמצא ב, ולכן המינימום נמצא בעומק 1.

כעת, כיוון שאנחנו יודעים שערך המקסימום נמצא ברמה 0, וערך המינימום נמצא ברמה 1, נוכל למצוא אותם בזמן קבוע, כי אנחנו צריכים לבצע רק פעולה אחת עבור המקסימום והשוואה אחת עבור המינימום (כי בעומק 1 יש לכל היותר שני איברים - מתכונות ערימה בינארית)

**ג.**

ננתח את סיבוכיות זמן הריצה עבור כל פונקציה בנפרד: (יש גם הסברים על פעולות הפונקציות כהערות בקוד עצמו)

קוראת ל או בהתאם לזוגיות הרמה שבה הקודקוד נמצא. סה"כ חישוב אחד והשוואה אחת.

כמתואר בהמשך ירוצו בסדר גודל של

ולכן נקבל

מבצעת את שגרת ה שאנחנו מכירים מערמות מינימום או מקסימום, בהתאם לרמה של האינדקס.

כאשר , נבצע וכאשר נבצע .

אופן פעולת הפונקציות הוא להלן:

* בדיקה שהאינדקס לא חורג מהמערך
* חישוב הבנים של האינדקס (2i+1 עבור השמאלי, 2i+2 עבור הימני, כפי שראינו בהרצאות/תרגילים)
* אם הבן השמאלי/ימני קיים (לא חורג מהאינדקס) וערכו קטן מערכו של האינדקס , אז האינדקס המינימלי הוא אותו הבן (המינימלי מבין שלושתם)
* כעת נחשב את הנכד השמאלי באותו אופן
* נעבור בלולאה על כל 4 הנכדים האפשריים (כיוון שהם נמצאים במקומות עוקבים במערך), אם הם קטנים מהאינדקס המינימלי, נעדכן אותו
* נבצע חילוף בין המינימלי לנוכחי
* נבצע תיקונים באם החלפנו עם אחד הנכדים ע"י החלפה של האבא עם הנכד וקריאה ל

כל קריאה ל יכולה לקחת (מהרקורסיה בסוף) לכל היותר , כפי שראינו בניתוח השגרה הרגילה של .

מבצע הכנסה של לתוך הערמה

* מכניס את המפתח לסוף המערך
* קורא ל עם האינדקס של המפתח שהוכנס כדי "לסדר" את הערמה

פונקציה ש"מתקנת" את ה, ומתחילה מהאינדקס שמועבר אליה.

* אם האינדקס הוא 0, כלומר הכנסנו את האיבר אל השורש, אין מה לתקן ולכן יוצאים
* אחרת, נמצא את ה"אב" של האינדקס, ואת הרמה
* אם הרמה זוגית, כלומר רמת , והאבא קטן מהצומת הנוכחי (כלומר מפר את תכונות ה) נבצע החלפה ונקרא ל על האבא, אחרת נקרא ל על הבן (כדי לבדוק הפרה כלפי מטה)
* אחרת נבצע את הבדיקות עם אופרטורים הפוכים ונקרא לפונקציות המתאימות בהתאמה.

נראה כי פועלות בסדר גודל של ולכן נקבל ש

מבצעת את ה"פעפוע" של הצומת למקום הנכון, כלפי מעלה.

* בודקים אם האינדקס שווה ל0, אם כן אז חוזרים כי הגענו לשורש
* אחרת, נחפש את אינדקס האבא עם , אם האבא הוא 0 אז אין לצומת סבים ולכן נחזור
* אחרת, אם הערך ב קטן(או גדול, בהתאם לפונקציה) מהערך שבסבא, נחליף ביניהם ונקרא רקורסיבית ל

כיוון שאנחנו עולים מהרמה האחרונה, עד לכל היותר הרמה הראשונה, בעץ בינארי, זה יהיה סימטרי ל-לעבור על הערמה מהשורש עד לעלה, שכפי שראינו לוקח , ולכן

מוחק את הצומת באינדקס שמועבר מהערמה.

* בודקים שהאינדקס קיים, אם לא מחזירים שגיאה
* אם האינדקס הוא העלה הימני ביותר, פשוט נוציא אותו מהמערך ונחזור כי אין מה לתקן
* אחרת, נחליף את האינדקס שמועבר עם האינדקס של העלה האחרון בערמה, נוציא אותו, ונבצע כדי לתקן את הערמה.

מספר השוואות קבועות וקריאה ל (שראינו שלוקח ) אז נקבל

הוצאת המינימום מהערמה.

* נבדוק אם הערמה ריקה, אם כן אז נחזיר שגיאה
* אם גודל הערמה הוא 1 פשוט נחזיר את השורש (כמו שראינו בניתוח בסעיף א')
* אחרת, נבצע השוואה בין הערך בצומת השמאלי לצומת הימני בעומק 1, ונחזיר את המינימלי ביניהם (בהתאם לסעיף א')

סה"כ מספר קבוע של השוואות ולכן

הוצאת המקסימום מערמה.

* כפי שראינו בסעיף א' המקסימום בהכרח יהיה בשורש.
* נבצע בדיקה לראות אם הערמה ריקה, אם כן נחזיר שגיאה, אם לא, נחזיר את הערך בשורש.

סה"כ מספר השוואות קבוע ולכן

בונה מהמערך המועבר.

* כמו בשגרה שראינו בהרצאה לבניית ערמה, ניגש לעלה הראשון שנמצא באינדקס

, ועבור כל אינדקס משם עד אינדקס 0 כולל בירידות של 1, נבצע קריאה ל.

מבחינת סיבוכיות הזמן ראינו ש הוא , ניתן לתחום את סיבוכיות עם בעקבות הלולאה. אך ראינו בהרצאה מניתוח סיבוכיות הדוק יותר שבניית הערמה נעשית ב, עצם העבודה שאנחנו קוראים בל לא משנה את הניתוח שביצענו, שכן ההבדלים בין שגרות אלו ל במקרה של ערמת מקסימום/מינימום היא שינוי האופרטורים.

לכן, נקבל

הדפסה פשוטה של המערך שמייצג את הערמה, מעבר על כל האיברים, סה"כ .